输入输出理论

创建日期: 2024 年 4 月 14 日
修改日期: 2024 年 4 月 15 日
标签: cavity

研究光学微腔的出射态.

实验中，常需利用光腔制备光的某些特殊量子态，例如猫态. 制备原理一般是让射入光腔的激光与腔内原子相互作用，入射前后对原子作适当操作，出射光即处在要制备的量子态. 为了分析、设计这类实验，我们需要分析光腔出射光和入射光之间的关系. 输入输出理论就是为了解决这一问题.

我们分析最简单的情况：一面完美的反射镜置于 $z=0$ 处，一面不完美的反射镜置于 $z=L$ 处，激光从正无穷处沿 $-z$ 方向入射，进入腔内，与腔内原子相互作用，再沿 $+z$ 方向出射. 腔内电磁场模式记为 a，满足玻色对易关系. 这模式可能与腔内其他自由度耦合，其哈密顿量记为 $H_{\mathrm{c}}(a,a^\dagger)$. 相互作用期间，腔外电磁场的正频项（即量子化为湮灭算符者）为

$$A_{\text{ext}}^{(+)}(z,t)=\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\sqrt{\frac{\hbar}{\pi c\epsilon_0 S\omega}}b(\omega;t)\sin\frac{\omega(z-L)}{c}, \tag{1}$$

其中 $b(\omega;t)$ 为海森堡绘景下的玻色算符，满足玻色对易关系. 哈密顿量为

$$H_{\text{ext}}=\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\hbar\omega b^\dagger(\omega)\,b(\omega). \tag{2}$$

腔外电磁场和腔内电磁场的相互作用可以建模为

$$H_{\text{int}}=\mathrm{i}\hbar\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,g(\omega)\left(b^\dagger(\omega)a-b(\omega)a^\dagger\right), \tag{3}$$

即频率为 ω 的光依 $g(\omega)$ 的概率透射.

考虑到只有腔共振频率 ω_{c} 附近会发生相互作用，我们引入如下近似：

- 电场模式的积分中，将系数 $\omega^{-1/2}$ 替换为常数 $\omega_{\mathrm{c}}^{-1/2}$，并将积分限扩展到 $-\infty$. 即

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\omega}}\to\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{\omega_{\mathrm{c}}}}. \tag{4}$$

- 将相互作用哈密顿量中的透射概率 $g(\omega)$ 替换为 $\sqrt{\kappa/\pi}$，并将积分下限扩展到 $-\infty$. 即

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,g(\omega)\to\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\omega. \tag{5}$$

作此近似并非因为它们真的接近，而是因为那些远离共振的部分最终几乎不对结果产生影响，所以计算或不计算它们、有限地改变它们的系数，对计算结果的影响微乎其微.

为了和实验相对应，还需定义入态和出态. 定义 T 时刻射入光腔的模式为 $a_{\text{in}}(t_0)$, 则 $(z,t)=(z,T-(z-L)/c)$ 处的入射光可写成

$$A_{\text{in}}^{(+)}(z,t)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{4\pi c\epsilon_0 S\omega_{\text{c}}}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\, b(\omega;t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega(z-L)}{c}\right)\equiv-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2c\epsilon_0 S\omega_{\text{c}}}}a_{\text{in}}(T), \tag{6}$$

定义 T 时刻射出光腔的模式为 $a_{\text{out}}(T)$，则 $(z,t)=(z,T+(z-L)/c)$ 处的出射光可写成

$$A_{\text{out}}^{(+)}(z,t)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{4\pi c\epsilon_0 S\omega_{\text{c}}}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\, b(\omega;t)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega(z-L)}{c}\right)\equiv-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2c\epsilon_0 S\omega_{\text{c}}}}a_{\text{out}}(T). \tag{7}$$

将上二式写得更紧凑一些，得到

$$a_{\text{in}}(t)=-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\, b(\omega,t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)}, \tag{8}$$

$$a_{\text{out}}(t)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\, b(\omega,t_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t_1)}. \tag{9}$$

注意，这里入射和出射场并不像式子所暗示的那样依赖于参考点 t_0、t_1 的选取，因为不同参考点对应的 $b(\omega)$ 不是独立的. 容易验证 a_{in}、a_{out} 满足玻色对易关系. 我们的任务是考察 a_{in} 和 a_{out} 之间的联系.

考虑相互作用时的海森堡方程. 算符 $b(\omega;t)$ 满足

$$\partial_t b(\omega)=-\mathrm{i}\omega b(\omega)+\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}a. \tag{10}$$

取参考时间 $t_0<t$ 或 $t_1>t$，积分，得

$$\begin{aligned} b(\omega;t)&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)}b(\omega;t_0)+\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}a(t')\\ &=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t_1)}b(\omega;t_1)-\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\int_{t}^{t_1}\mathrm{d}t'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}a(t'). \end{aligned} \tag{11}$$

算符 a 满足

$$\partial_t a(t)=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[a,H_{\text{c}}]-\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\, b(\omega;t). \tag{12}$$

代入 $b(\omega)$ 的两个解，得

$$\begin{aligned} \partial_t a(t)&=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[a,H_{\text{c}}]+\sqrt{2\kappa}a_{\text{in}}(t)-\kappa a(t)\\ &=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[a,H_{\text{c}}]-\sqrt{2\kappa}a_{\text{out}}(t)+\kappa a(t). \end{aligned} \tag{13}$$

这两式一般称为量子朗之万方程. 两式相减得到

$$a_{\text{in}}+a_{\text{out}}=\sqrt{2\kappa}a, \tag{14}$$

此即输入输出关系. 我们一般利用输入输出关系和任意一个量子朗之万方程来求解光腔出射光和入射光的联系.

考虑一个具体的例子. 光腔中有一三能级原子，有 $|0\rangle$、$|1\rangle$、$|e\rangle$ 三个本征态，其中 $|1\rangle$、$|e\rangle$ 能量分别为 $\mp\omega_{\text{a}}/2$. 腔中光子与 $|1\rangle$ 和 $|e\rangle$ 耦合，哈密顿量为

$$H_{\text{c}}=\frac{\omega_{\text{a}}}{2}\sigma^z+\hbar g\left(\sigma_+a+\sigma_-a^\dagger\right)+\hbar\omega_{\text{c}}a^\dagger a, \tag{15}$$

其中 $\sigma_+ = |e\rangle\langle 1|$，$\sigma_- = \sigma_+^\dagger$，$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |1\rangle\langle 1|$. 此时我们要解方程

$$\partial_t a = -\mathrm{i}g\sigma_- - (\mathrm{i}\omega_\mathrm{c} + \kappa)\, a + \sqrt{2\kappa} a_\mathrm{in}, \tag{16}$$

$$a_\mathrm{in} + a_\mathrm{out} = \sqrt{2\kappa} a. \tag{17}$$

原子处于 $|0\rangle$ 态时，不参与耦合，$\sigma_- = 0$. 此时方程在频域的解为

$$a_\mathrm{out}(\omega) = -\frac{\mathrm{i}\Delta_\mathrm{c} - \kappa}{\mathrm{i}\Delta_\mathrm{c} + \kappa} a_\mathrm{in}(\omega), \tag{18}$$

其中 $\Delta_\mathrm{c} = \omega_\mathrm{c} - \omega$. 若原子处于 $|1\rangle$ 态，还需考虑 σ_- 的运动方程

$$\partial_t \sigma_- = -\mathrm{i}\omega_a \sigma_- + \mathrm{i}g a \sigma_z. \tag{19}$$

在频域解得

$$a_\mathrm{out}(\omega) = -\frac{\mathrm{i}\left(\Delta_\mathrm{c} + g^2\sigma_z/\Delta_\mathrm{a}\right) - \kappa}{\mathrm{i}\left(\Delta_\mathrm{c} + g^2\sigma_z/\Delta_\mathrm{a}\right) + \kappa} a_\mathrm{in}(\omega). \tag{20}$$

显然，失谐很小、光腔协作率（cooperativity）很高时，即 $\Delta \ll \kappa \ll g$ 时，上述关系变成

$$a_\mathrm{out} = \begin{cases} a_\mathrm{in} & \text{原子处于 } |0\rangle \text{ 态，} \\ -a_\mathrm{in} & \text{原子处于 } |1\rangle \text{ 态.} \end{cases} \tag{21}$$

这是一个以原子为控制比特的门作用：$a \to \pm a$. 写在光子数表示下，为

$$|0\rangle_\mathrm{a} \otimes |n\rangle \to |0\rangle_\mathrm{a} \otimes |n\rangle, \quad |1\rangle_\mathrm{a} \otimes |n\rangle \to (-1)^n |1\rangle_\mathrm{a} \otimes |n\rangle. \tag{22}$$

写在相干态表示下，为

$$|0\rangle_\mathrm{a} \otimes |\alpha\rangle \to |0\rangle_\mathrm{a} \otimes |\alpha\rangle, \quad |1\rangle_\mathrm{a} \otimes |\alpha\rangle \to |1\rangle_\mathrm{a} \otimes |-\alpha\rangle. \tag{23}$$

注意，我们这里采用的约定和部分量子信息领域的文献略有不同，因此得到的门略有差异（见 [1, 2]）. 我们定义的 a_out 对应的模式和 a_in 差相位 π，这定义合于经典的菲涅尔公式. 若采取输出和输入不差相位的定义，a_out 会和我们的定义差一个负号.

参考文献

[1] L.-M. Duan and H.J. Kimble, *Scalable photonic quantum computation through cavity-assisted interactions*, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 127902.

[2] B. Hacker, S. Welte, S. Daiss, A. Shaukat, S. Ritter, L. Li et al., *Deterministic creation of entangled atom–light Schrödinger-cat states*, *Nature Photonics* **13** (2019) 110.